**第八章立体几何初步知识+典型例题+练习题+答案**

**一、基本立体图形**

**1棱柱的结构特征**

一般地,有两个面互相平行，其余各面都是四边形,并且相邻两个四边形的公共边都互侧相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱.

**正棱柱：**底面是正多边形的直棱柱

**2.棱锥的结构特征**

一般地,有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫做棱锥 .这个多边形面叫做棱锥的底面或底;有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的侧面;各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点.相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱;

**正棱锥的性质：**各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形；顶点在底面上的射影是底面正多边形的中心。

**正四面体：**四个面都是全等三角形的三棱锥。正四面体是正三棱锥，正三棱锥不一定是正四面体。空间四边形是三棱锥。

**3.圆柱的结构特征**以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的曲面所围成的几何体叫做圆柱.旋转轴叫做圆柱的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面;平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面;无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线.  
**4.圆锥的结构特征**以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴,其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆锥.  
**5.棱台于圆台的结构特征**用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间那部分，这样的几何体叫做棱台在棱台中，原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面，棱台也有侧面、侧棱、顶点.  
**6.球的结构**以半圆的直径所在直线为旋转轴.半圆面旋转一周形成的几何体叫做球体.简称球.半圆的圆心叫做球的球心.半圆的半径叫做球的半径.半圆的直径叫做球的直径.

**二、直观图**

定义:直观图是观察者站在某一点观察一个空间几何图获得的图形，画立体图形的直观图，实际上是把不完全在同一平面内的点的集合，用同一平面内的点表示。

因此，直观图往往与立体图形的真实形状不完全相同。

在立体几何中，立体图形的直观图通常是在平行投影下得到的平面图形

画法：斜二测画法和正等测画法.

**1、斜二测画法规则**

(1）在己知图形中取互相重直的x轴或y轴，两轴相交于点O，画直观图时，把它们画成对应的x，轴与y'轴，两轴相交于点O，，且=45°（或135°)，它们确定的平面表示水平面

（2）已知图形中平行于x轴或y轴的线段。在直观图中分剔画成平行于x，轴与y，轴的线段

(3)已知图形中平行于x轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于y轴的线段，在直观图中长度为原来的一半

**2、**

**3、典型例题**

例1．已知下“斜二测”画法下，△ABC的直观图是一个边长为4的正三角形，则△ABC的面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】“斜二测”画法下，直观图的面积是原来的面积的，故B正确．

**4、变式训练：**如果一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为45°，腰和上底均为的等腰梯形，那么原平面图形的面积是( )．

A．2＋ B． C． D．

**三、棱柱、棱锥、棱台的表面积**多面体的表面积就是围成多面体各个面的面积的和，棱柱、棱锥、棱台的表面积就是围成它们的各个面的面积的和  
**1.棱柱、棱锥、棱台的体积  
棱柱：**柱体的底面面积为S，高为h，则V=Sh

**棱锥**：椎体的底面面积为S，高为h，则V=Sh

**棱台**：台体的上、下底面面积分别为，,高为h，则

**2.圆柱、圆锥、圆台、球的表面积与体积**

**表面积**

（1）圆柱表面积：（r是底面半径，l是母线长）

（2）圆锥表面积：=（r是底面半径，l是母线长）

（3）圆台表面积：（分别是上、下底面半径，是母线长）  
（4）球的表面积：

**3.体积**

（1）圆柱体积：（r是底面半径，h是高）

（2）圆锥体积：（r是底面半径，h是高）

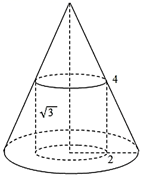
（3）圆台体积：（分别是上、下底面半径，是高）

（4）球的体积：

****

**4、典型例题**

**例1**..在底面半径为2母线长为4的圆锥中内接一个高为 的圆柱，求圆柱的表面积.

【答案】 解：设圆锥的底面半径为 ，圆柱的底面半径为 ，表面积为 ，

底面半径为2母线长为4的圆锥的高为 ，

则圆柱的上底面为中截面，可得 ，

， ，

**例2**.如图，已知四棱台的两底面均为正方形，且边长分别为 和 ，侧面积为 ，求其体积 

【答案】 解：取 的中点 ， 的中点 ，上、下底面的中心 ，则 为斜高，四边形 为直角梯形,

∵ ，

∴ ，在直角梯形 中，

， ，

∴ ，

故该四棱台的体积为

**5、变式训练**

**1.**已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为4，体积为16，则这个球的表面积是（ ）

A． B． C． D．

**2．**半径为R的半圆卷成一个圆锥，则它的体积为\_\_\_\_\_.

**3．**底面半径为1，母线长为2的圆锥的体积为（ ）

A． B． C． D．

**4.**已知圆柱的轴截面为正方形，且圆柱的体积为，则该圆柱的侧面积为 ．

**5．**已知圆锥的轴截面是等边三角形，该圆锥的体积为，则该圆锥的侧面积等于 ．

**四.平面**

1. **三个基本事实**
2. 过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。（不共线的三点确定一个平面）

（2）如果一条直线上两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内。

（3）如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

**2.三个推论**

（1）经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面

1. 经过两条相交直线，有且只有一个平面
2. 经过两条平行直线，有且只有一个平面

**3.基本事实4 平行的传递性：**平行于同一条直线的两条直线平行

**等角定理：**空间中如果一个角的两边对应平行，则这两个角相等或互补

**五、空间点、直线、平面之间的位置关系**

1. **空间中直线与直线的位置关系**
2. 异面直线：不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线
3. 空间中两条直线的位置关系

相交直线：在同一平面内，有且只有一个公共点

平行直线：在同一平面内，没有公共点

异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点

1. **空间中直线与平面的位置关系**
2. 直线在平面内——有无数个公共点
3. 直线与平面相交——有且只有一个公共点
4. 直线与平面平行——没有公共点
5. **空间中平面与平面的位置关系**
6. 两个平面平行——没有公共点（2）两个平面相交——有一条公共直线

**六、 立体几何点 线 面的位置关系**

**平行关系**

**平面几何知识**

**线线平行**

**线面平行**

**面面平行**

**垂直关系**

**平面几何知识**

**线线垂直**

**线面垂直**

**面面垂直**

判定

性质

判定推论

性质

判定

判定

性质

判定

面面垂直定义

1.

2.

3.

4.

5.



平行与垂直关系可互相转化

**典型例题：**已知是两条不同直线，是三个不同平面，下列命题中正确的是（ D）

A． B．

C． D．

**变式练习：**

**1**.设为两条直线,为两个平面,下列四个命题中，正确的命题是( )

A．若与所成的角相等，则 B．若，，，则

C．若，，，则 D．若，，，则

**2**.设为平面，为直线，则的一个充分条件是( )

(A)  (B) 

(C)  (D) 

**3．**设、是不同的直线,、、是不同的平面,有以下四个命题:

① 若 则 ②若,,则

③ 若,则 ④若,则

其中真命题的序号是（ ）

A．①④ B．②③ C．②④ D．①③

**4．**对于平面和直线,下列命题中假命题的个数是（ ）

①若,,则;②若,,则;

③若, ,则; ④若,,则

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

**5.**知*a*、*b*是两条不重合的直线，*α*、*β*、*γ*是三个两两不重合的平面，给出下列四个命题：

①若*a*⊥*α*，*a*⊥*β*，则*α*∥*β*②若*α*⊥*γ*，*β*⊥*γ*，则*α*∥*β*

③若*α*∥*β*，*a*⊂*α*，*b*⊂*β*，则*a*∥*b*④若*α*∥*β*，*α*∩*γ*＝*a*，*β*∩*γ*＝*b*，则*a*∥*b*

其中正确命题的序号有\_\_\_\_\_\_\_\_．

**七、平行专题**

**1、线线平行的判断：**

**（1）三角形中位线定理；**

**（2）构造平行四边形，其对边平行；**

**（3）对应线段成比例，两直线平行；**

**（4）平行于同一直线的两直线平行；（平行的传递性）**

**（5）如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行；（线面平行的性质）**

**（6）如果两个平行平面同时和第三个平面相交，所得交线平行；（面面平行的性质）**

**（7）垂直于同一平面的两直线平行；（线面垂直的性质）**

**（8）同位角、内错角相等或者同旁内角互补，两直线平行。**

**2、线面平行的判断：**

（1）如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

（2）两个平面平行，其中一个平面内的直线必平行于另一个平面。

**3、面面平行的判断：**

（1）一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面，这两个平面平行。

（2）垂直于同一条直线的两个平面平行。

**4、典型例题**

**例1**、（三角形中位线定理）如图，在正方体中，是的中点，求证：平面。

*A*1

*E*

*D*1

*C*1

*B*1

*D*

*C*

*B*

*A*

证明：连接交于，连接，

∵为的中点，为的中点

∴为三角形的中位线 ∴

又在平面内，在平面外

∴平面。

**例2**、（证明是平行四边形）已知正方体，是底对角线的交点.求证： *C*1*O*∥面；

证明：（1）连结，设，连结

∵ 是正方体 是平行四边形

∴*A*1*C*1∥*AC*且 

又分别是的中点，∴*O*1*C*1∥*AO*且

是平行四边形

面，面 ∴*C*1*O*∥面

**例3、**（线面平行的性质）如图，四面体*A*—*BCD*被一平面所截，截面*EFGH*是一个矩形.

C

A

B

E

H

F

G

D

求证：*CD*∥平面*EFGH*.

（1）证明：∵截面*EFGH*是一个矩形，

∴*EF*∥*GH*， 又*GH*⊂平面*BCD*.

∴*EF*∥面*BCD*，而*EF*⊂面*ACD*，

面*ACD*∩面*BCD*=*CD*.

∴*EF*∥*CD*，∴*CD*∥平面*EFGH*.

**例4、**（面面平行的性质）学考练86页右下角要点2迁移应用

**例5、**（线面垂直的性质）学考练92页要点1典型例题和迁移应用

**5、变式训练**

**1.**如图，在正方体[](http://www.7caiedu.cn/)中，[](http://www.7caiedu.cn/)、、分别是

、、的中点.求证：平面∥平面.

**2．**如图所示，在四棱锥中，平面，，是的中点．

****（1）求证：；

（2）若是线段上一动点，则线段上是否存在点，

使平面？说明理由．

**八、垂直专题**

**1、线线垂直的判定方法：**

1. **等腰三角形三线合一**
2. **菱形的对角线互相垂直**
3. **线线、线面垂直相互转化**
4. **直径所对的圆周角为直角**
5. **勾股定理的逆定理（有边长，结合余弦定理）**
6. **证明所成角为直角**
7. **三垂线定理**

**（8）一条直线和两条平行直线中的一条垂直，也必垂直平行线中的另一条。**

**2、线面垂直的判断：**

（1）如果一直线和平面内的两相交直线垂直，这条直线就垂直于这个平面。

（2）如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

（3）一直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面。

（4）（面面垂直的性质）如果两个平面垂直，那么在—个平面内垂直于交线的直线必垂直于另—个平面。

**3、面面垂直的判断：**

（1）一个平面经过另一个平面的垂线，这两个平面互相垂直。

（2）两个平面所成角是直二面角

**4、典型例题**

**例1、（等腰三角形三线合一）**如图，已知空间四边形中，，是的中点。求证：（1）平面CDE;（2）平面平面。

A

E

D

B

C

证明：（1） 同理，

又∵ ∴平面

（2）由（1）有平面

又∵平面， ∴平面平面

**例2**、（菱形的对角线互相垂直、等腰三角形三线合一）已知四棱锥的底面是菱形．，为的中点．（Ⅰ）求证：∥平面；（Ⅱ）求证：平面平面．

证明：

**例3**、(线线、线面垂直相互转化)已知中,面,,求证：面．

证明：° 

又面  面

 又面

**例4、**(直径所对的圆周角为直角)如图2所示，已知垂直于圆O在平面，是圆O的直径，是圆O的圆周上异于、的任意一点，且，点是线段的中点.求证：平面.















图2

证明：∵所在平面，是的弦，∴.

又∵是的直径，是直径所对的圆周角，∴.

∵平面，平面.

∴平面，平面，∴.

∵，点是线段的中点.∴.

∵,平面，平面.

∴平面.

**例5、**（勾股定理的逆定理）.如图，在四棱锥中，，且，，，点在上，且．

（1）求证：平面平面；

（2）求证：直线平面．

【解析】证明：（1）因为，，所以，

所以；又，且，

平面，平面，所以平面，又平面，所以平面平面；

（2）连接，交于点，连接，在四边形中，，，

由，得，又，即，所以，

又直线平面，直线平面，所以直线平面．

**例6、**（证明所成角为直角）在如图所示的几何体中，四边形*ABCD*是等腰梯形，*AB*∥*CD*，∠*DAB*＝60°，*AE*⊥*BD*，*CB*＝*CD*＝*CF*. 求证：*BD*⊥平面*AED*；

****证明　因为四边形*ABCD*是等腰梯形，*AB*∥*CD*，∠*DAB*＝60°，

所以∠*ADC*＝∠*BCD*＝120°.

又*CB*＝*CD*，所以∠*CDB*＝30°，

因此∠*ADB*＝90°，即*AD*⊥*BD*.

又*AE*⊥*BD*，且*AE*∩*AD*＝*A*，*AE*，*AD*⊂平面*AED*，

所以*BD*⊥平面*AED*.

**例7**、（三垂线定理）证明：在正方体ABCD－A1B1C1D1中，A1C⊥平面BC1D

证明：连结AC

∴ AC为A1C在平面AC上的射影



**5、变式训练**

**1．**在正四棱锥中，，分别为棱，的中点．

（1）求证：平面；

（2）求证：平面．

**2．**如图，在四棱锥中，底面为正方形，底面，，，分别是，的中点

（1）求证：平面；

（2）求证：平面；

**3．**如图，在直三棱柱中，，，点为中点，连接、交于点，点为中点．

（1）求证：平面；

（2）求证：平面平面．

**4．**如图，在四棱锥中，平面平面，四边形为矩形，，点，分别是，的中点，求证：

（1）直线平面；

（2）平面平面．

**九、线线、线面和面面的所成角问题**

**1、两异面直线及所成的角**：不在同一个平面的两条直线,叫做异面直线,已知异面直线a,b,经过空间任一点O作直线∥,∥,我们把与所成的锐角(或直角)叫做异面直线与所成的角(或夹角).如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条直线互相垂直.

**2、直线和平面所成的角**：一条直线PA和一个平面α相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点A叫做斜足。过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线PO，过垂足O和斜足A的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影。

平面的一条斜线和它在平面内的摄影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。一条直线垂直于平面，我们就说它们所成的角是直角。一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是.

**3、二面角**：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。 在二面角的棱上任取一点O，以点O为垂足，在半平面α和β内分别作垂直于棱的射线OA和OB，则射线OA和OB构成的∠AOB叫做二面角的平面角。

二面角的大小可以可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度。

**常见角的取值范围：**

1. 异面直线所成的角 直线与平面所成的角 二面角的取值范围依次

**4、点到平面距离和线到面的距离：**平行平面的直线到平面的距离转化为线上的点到平面的距离，点到平面的距离就是求点到平面的垂线段的长度，其关键在于确定点在平面内的垂足，当然别忘了转化法与等体积法的应用.

**5、典型例题**

**例1．**如图，在三棱锥中，，，则异面直线 与所成角的余弦值是

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】如图所示，分别取、、的中点、、，连接、、、和，则*DE*∥*SB*，*DF*∥*AC*，所以即为异面直线与所成角． 由题可知，△*ABC*和△*SBC*均为正三角形，所以，即△*AFS*为等边三角形，因为为的中点，所以，

而，，

在△*DEF*中，由余弦定理知，．

**例2、**已知是矩形，平面，，，为的中点．

（1）求证：平面；（2）求直线与平面所成的角．

证明：在中，，

∵平面，平面，又，平面

（2）为与平面所成的角

在，，在中，，在中，，

**例3、**如图，在四棱锥中，底面是且边长为的菱形，侧面是等边三角形，且平面垂直于底面．

（1）若为的中点，求证：平面；

（2）求证：；

（3）求二面角的大小．

证明：（1）为等边三角形且为的中点，

又平面平面，平面

（2）是等边三角形且为的中点，

且，，平面，平面，

（3）由，∥，又，∥，

为二面角的平面角在中，，

**例4．**如图，在直三棱柱中，，，点为中点，连接、交于点，点为中点．

（1）求证：平面；

（2）求证：平面平面；

（3）求点到平面的距离．

【解析】解：（1）证明：直三棱柱，四边形为平行四边形，

为的中点，为的中点，，

又平面，平面，平面．

（2）四边形为平行四边形，，平行四边形为菱形，即．

三棱柱为直三棱柱，平面，平面，，

，，，，，平面，

平面．平面，，，，

，平面，平面，平面，平面平面．

（3）连接，设点到平面的距离为，

平面，，平面，

，，为三棱锥高，

在直角△中，，．

在直角△中，，，

在直角中，，，，

在等腰△中，，

，，，

，点到平面的距离为．

**6、变式训练**

**1．**四棱锥中，底面为正方形，且平面，，则直线与直线所成角的大小为( )

A． B． C． D．

**2．**在长方体中，，，则直线与平面所成角的正弦值为

A． B． C． D．

**3．**如图，在四棱锥P—ABCD中，PA⊥平面ABCD，底面ABCD为直角梯形，∠ABC＝∠BAD＝，PA＝AB＝BC＝1，AD＝2．则PB与平面PCD所成的角的正弦值为 ．

**4．**如图，在正方体中，二面角的大小为

A． B． C． D．

**5．**已知正三棱柱中，，则点到平面的距离等于

A．1 B． C． D．

**6.**（选做）如图，在四棱锥*P*—*ABCD*中，底面*ABCD*为正方形，*PA*⊥底面，*PA*＝*AD*，*M*，*N*分别是*AB*，*PC*的中点．

（1）求证：*MN*∥平面*PAD*；

（2）求证：*MN*⊥平面*PCD*；

（3）求二面角*B*—*PC*—*D*的大小．

**7．**（选做）四棱锥中，平面，四边形为菱形，，，为的中点．

（1）求证：平面平面；

（2）求与平面所成的角的正切值；

（3）求二面角的正弦值．

**十、外接球的有关问题**

例1．已知正三棱锥S—ABC的侧棱长为，底面边长为6，则该正三棱锥外接球的表面积是 ．

【答案】

【解析】由正棱锥得，顶点在底面的投影是三角形的外接圆的圆心，外接圆的半径，正三棱锥的外接球的球心在高所在的直线上，设为，连接 得：，

所以，即，所以三棱锥的高，

由勾股定理得，，解得：，所以外接球的表面积．

例2．已知直三棱柱ABC—A1B1C1的6个顶点都在球O的球面上，若AB＝1，AC＝，AB⊥AC，AA1＝4，则球O的表面积为

A．5 B．10 C．20 D．

【答案】C

【解析】由直棱柱的外接球的半径与底面三角形的外接圆的半径和棱柱高的一半构成直角三角形．，，，外接圆的半径，

球心到底面的距离，球的半径满足，球的表面积为．

**变式训练**

1．在直三棱柱ABC—A1B1C1中，AB＝2，AC＝，∠BAC＝30°，AA1＝，则其外接球体积是 ．

2．已知长方体ABCD—A1B1C1D1的共顶点的三条棱长度之比为1：1：2，且其外接球的表面积为，则该长方体的全面积为 ．

3．半径为2的球O内有一个内接正三棱柱，则正三棱柱的侧面积的最大值为 ．